1.3 Koordinierungssysteme

D1.13 Koordinierungssysteme

Ein Prozeßsystem P = (A, D, bz, adr, w) ist ein (Φ, Θ)-Koordinierungssystem, wenn es folgende zusätzliche Eigenschaften besitzt:

1 D hat die Gestalt $D_1 \times D_2 \times ... \times D_n \times Z^m \times E$. Das zugehörige typische Element habe die Form $(L_1, L_2, ..., L_n, S_1, S_2, ..., S_m, H)$, wobei Z die Menge der ganzen Zahlen bezeichnet.
$S_1, S_2, ..., S_m$ heißen Semaphore, der Semaphorvektor $(S_1, S_2, ..., S_m)$ wird mit S bezeichnet.

2 $\Phi = \{\Phi_1, ..., \Phi_r\}$ ist eine Menge von Prädikaten über Semaphoren und $\Theta = \{\Theta_1, ..., \Theta_r\}$ eine Menge von Zuweisungen, die nur von Semaphoren abhängen und nur Semaphore ändern.

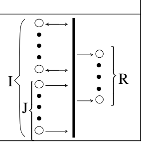
3 Alle Aktionen haben

entweder die Form $a_{i,j}$: WHEN $'L_i = j$ DO $L_i = N_{i,j}('H)$ AND $H = F_{i,j}('H)$
und heißen **nichtkoordinierend**

oder die Form $a_{i,j}$: WHEN $'L_i = j$ AND $\Phi_{k_{i,j}}$ DO $L_i = succ_i(j)$ AND $\Theta_{k_{i,j}}$
und heißen **koordinierend**.

Wichtige (Φ, Θ)-Koordinierungssysteme

Systemname	Φ	Θ	Operationsbezeichnung
PV	$'S_j > 0$	$S_j = {'S_j} - 1$	$P(S_j)$
	true	$S_j = {'S_j} + 1$	$V(S_j)$
PV two way bounded	$'S_j > 0$	$S_j = {'S_j} - 1$	$P_k(S_j)$
k > 0	$'S_j < k$	$S_j = {'S_j} + 1$	$V_k(S_j)$
PV chunk	$'S_j \geq t$	$S_j = {'S_j} - t$	$P(S_j{:}t)$
t > 0	true	$S_j = {'S_j} + t$	$V(S_j{:}t)$
PV multiple	$\forall j(j \in J \Rightarrow {'S_{i_j}} > 0)$	$\forall j(j \in J \Rightarrow S_{i_j} = {'S_{i_j}} - 1)$	$P(\{S_{i_j} \mid j \in J\})$
J = {1, ...,k}	true	$\forall j(j \in J \Rightarrow S_{i_j} = {'S_{i_j}} + 1)$	$V(\{S_{i_j} \mid j \in J\})$
PV general J = {1, ...,k}	$\forall j(j \in J \Rightarrow {'S_{i_j}} \geq t_j)$	$\forall j(j \in J \Rightarrow S_{i_j} = {'S_{i_j}} - t_j)$	$P(\{S_{i_j}{:}t_j \mid j \in J\})$
$\forall j(j \in J \Rightarrow t_j > 0)$	true	$\forall j(j \in J \Rightarrow S_{i_j} = {'S_{i_j}} + t_j)$	$V(\{S_{i_j}{:}t_j \mid j \in J\})$

Systemname	Φ	Θ	Operationsbezeichnung
up/down	$\sum_{r=1}^{k} {'S_{i_r}} \geq 0$	$S_j = {''S_j} + 1$	$\{S_{i_r} \mid 1 \leq r \leq k\}$: up$(S_j)$
	$\sum_{r=1}^{k} {'S_{i_r}} \geq 0$	$S_j = {'S_j} - 1$	$\{S_{i_r} \mid 1 \leq r \leq k\}$: down$(S_j)$
Vektorersetzung $e_1, e_2 \in Z^m$	$'S + e \geq 0$	$S = {'S} + e_2$	$<e_1 \mid e_2>$
Vektoraddition $e \in Z^m$	$'S + e \geq 0$	$S = {'S} + e$	$<e>$
Petrinetz I, J, R $\subseteq$ {1,...,m} $I \cap R = \emptyset$; $J \subseteq I$ Die Wahl von I, J und R erfolgt aktionsspezifisch.	$\forall i(i \in I \Rightarrow {''S_i} > 0)$	$\forall j(j \in J \Rightarrow S_j = {'S_j} - 1)$ $\wedge \forall r(r \in R \Rightarrow S_r = {'S_r} + 1)$	

S1.4 Satz von Kosaraju

Es sei K = (A, D, bz, adr, w) definiert durch:

1 $D = \{1, 2\}^4 \times Z^2$ mit typischem Element $(L_1, L_2, L_3, L_4, S_1, S_2)$;

2 A =
{ $a_{1,1}$: WHEN $'L_1 = 1$ DO $L_1 = 2$ AND $S_1 = {'S_1} + 1$
$a_{1,2}$: WHEN $'L_1 = 2$ DO $L_1 = 1$
$a_{2,1}$: WHEN $'L_2 = 1$ DO $L_2 = 2$ AND $S_2 = {'S_2} + 1$
$a_{2,2}$: WHEN $'L_2 = 2$ DO $L_2 = 1$
$a_{3,1}$: WHEN $'L_3 = 1$ AND $'S_1 > 0$ DO $L_3 = 2$ AND $S_1 = {'S_1} - 1$
$a_{3,2}$: WHEN $'L_3 = 2$ DO $L_3 = 1$
$a_{4,1}$: WHEN $'L_4 = 1$ AND $'S_1 = 0$ AND $'S_2 > 0$ DO $L_4 = 2$ AND $S_2 = {'S_2} - 1$
$a_{4,2}$: WHEN $'L_4 = 2$ DO $L_4 = 1$
} ;

3 w = (1, 1, 1, 1, 0, 0).

Dann gibt es kein nur aus synchronisierenden Aktionen bestehendes 'Petrinetz'-System, das K vollständig und sicher implementiert.

BP 2 Prozeßsysteme und Koordinierung: 2-Erzeuger-2-Verbraucher-Problem

Beweis:

Angenommen $\overline{K}$ sei ein 'Petrinetz'-System mit Semaphor-Vektor $\overline{S}$, das nur koordinierende Aktionen enthält und bezüglich r eine vollständige und sichere Implementation von K ist. Dann existieren zu jedem i Abläufe $\alpha_i^{(1)}$ und $\alpha_i^{(1)}$ in $\overline{K}$ so, daß

$r(\alpha_i^{(1)}) = a_{2,1} \bullet a_{2,2} \bullet (a_{1,1} \bullet a_{1,2})^i$,

$r(\alpha_i^{(2)}) = (a_{3,1} \bullet a_{3,2})^i \bullet a_{4,1} \bullet a_{4,2}$ und

$\alpha_i^{(1)} \bullet \alpha_i^{(2)}$ aktiv in $\overline{K}$ ist.

Setzt man $Z_i = val_{\overline{K}}(\alpha_i^{(1)})$, dann existieren nach dem Lemma von König Indizes i und j mit:

1. $i < j$ und
2. $S[Z_i] \le \overline{S}[Z_j]$.

Aus 2. folgt, daß mit $\alpha_i^{(1)} \bullet \alpha_i^{(2)}$ auch $\alpha_j^{(1)} \bullet \alpha_i^{(2)}$ aktiv ist.

Also ist in K der Ablauf

$r(\alpha_j^{(1)} \bullet \alpha_i^{(2)}) = a_{2,1} \bullet a_{2,2} \bullet (a_{1,1} \bullet a_{1,2})^j \bullet (a_{3,1} \bullet a_{3,2})^i \bullet a_{4,1} \bullet a_{4,2}$ aktiv

und damit die Implementation nicht sicher im Widerspruch zur Annahme.

BP 2 Prozeßsysteme und Koordinierung: 2-Erzeuger-2-Verbraucher-Problem

❑ Lösung durch kombinatorische (inhibitorische) Petrinetz-Systeme

	Φ	Θ
Kombinatorisches Petrinetz	$\forall i(i \in I \Rightarrow {}'S_i > 0) \wedge \forall k(k \in K \Rightarrow ({}'S_k = 0))$	$\forall j(j \in J \Rightarrow (S_j = {}'S_j - 1)) \wedge \forall r(r \in R \cup L \Rightarrow (S_r = {}'S_r + 1))$

Dabei ist: $I, J, K, L \subseteq \{1,...,m\}$;

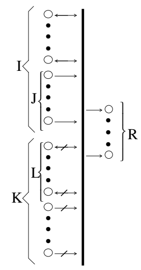
$I \cap K = \emptyset$;

$(I \cup K) \cap R = \emptyset$;

$J \subseteq I$;

$L \subseteq K$

Die Wahl von I, J, K und R erfolgt aktionsspezifisch.

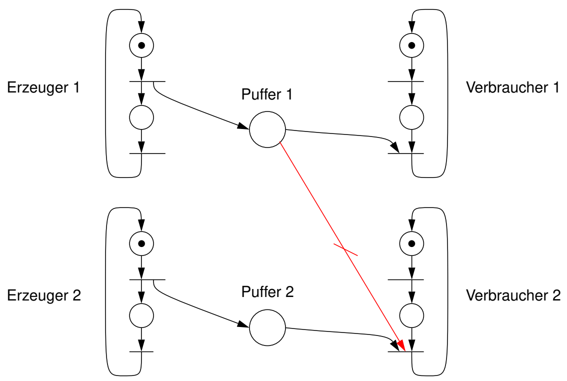


Graphische Darstellung

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

BP 2 Prozeßsysteme und Koordinierung: 2-Erzeuger-2-Verbraucher-Problem

❑ Lösung des 2-Erzeuger-2-Verbraucher-Problems durch ein kombinatorisches Petrinetz



Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

BP 2 Prozeßsysteme und Koordinierung: Schnitte

D1.14 Definition: Σ-Schnitt Π

Σ sei eine endliche Menge. Σ^1 sei die Menge aller Folgen aus paarweise verschiedenen Elementen von Σ. Die Menge Π heißt Σ-Schnitt, wenn gilt:

1. $\Pi \subseteq \Sigma^1$, d. h. jedes Element von Π ist eine Folge von paarweise verschiedenen Elementen aus Σ.
2. Jedes Element von Σ gehört zu Π
3. $\alpha\beta \in \Pi \Rightarrow \alpha \in \Pi$

D1.15 Definition: Prozeßsystem P definiert Schnitt Π

Das Prozeßsystem $P = (A, D, bz, adr, w)$ definiert den Σ-Schnitt Π, wenn eine bijektive Abbildung d von A nach Σ existiert mit:

$d\{\alpha | \alpha \text{ aktiver Ablauf in } P\} = \Pi$.

Hierbei ist $d(\alpha) = d(a_1)d(a_2)\ldots d(a_k)$, falls $\alpha = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$.

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

D1.16 Definition: Prozeßsystem P definiert Schnitt Π implizit

$P = (A, D, bz, adr, w)$ definiert den Σ-Schnitt Π implizit, wenn gilt:
Es existiert eine Teilmenge A' von A und ein aktiver Ablauf α in P, so daß $(A', D, bz, adr, value(\alpha))$ den Σ-Schnitt Π definiert.

D1.17 Definition: Ausschlußschnitt Π

Sei R reflexive Relation auf der endlichen Menge Σ. Sei exclusion(R) die Menge aller endlichen Folgen $a_1 \ldots a_n$ von Elementen aus Σ, so daß für $1 \le i < j \le n$ gilt: $\neg(a_i R a_j)$.
Ein Σ-Schnitt Π heißt Ausschlußschnitt genau dann, wenn $\Pi = exclusion(R)$ ist für eine (geeignete) reflexive Relation R auf Σ.

S1.5 Fundamentaltheorem

Es sei Q bezüglich r eine vollständige, sichere, schwach prozeßtreue, prompte und behinderungsfreie Implementation von P. Weiter sei β aktiv in P und $\{g_1, g_2, \ldots, g_m\} = lf_P(\beta)$. Dann existieren in Q ein aktiver Ablauf α und Aktionen $h_1, h_2, \ldots, h_m$ derart, daß gilt:

1 $r(\alpha) = \beta$ und $r(h_i) = g_i$ für $1 \le i \le m$,

2 $\{h_1, h_2, \ldots, h_m\} = lf_Q(\alpha)$.

- Beweis des Fundamentaltheorems
  - 1. Teilaussage: Es ex. $h_1, \ldots, h_m$ mit $r(\{h_1, \ldots, h_m\}) = \{g_1, \ldots, g_m\}$

vollständig: $g_i \in lf_P(\alpha)$ $\Rightarrow$ es ex. $\gamma_i f_i$ mit $r(\gamma_i) = \beta \wedge r(f_i) = g_i$

$\{g_1, \ldots, g_m\} = lf_P(\beta)$ $\Rightarrow \{g_1, \ldots, g_m\} \subseteq bef_P(\beta)$

$\Rightarrow (i \ne j \Rightarrow \neg proc_P(g_i, g_j))$

schwach prozeßtreu: $\Rightarrow (i \ne j \Rightarrow \neg proc_Q(f_i, f_j))$

O. B. d. A. $f_i \in Q_i$

$\Rightarrow \forall f(f \in A_Q \wedge (r(f) = g_i) \Rightarrow f \in Q_i)$ (1)

prompt: es ex. c, so daß für jeden aktiven Ablauf α in Q gilt: $1 + |r(\alpha)| \ge c|\alpha|$

$\Rightarrow ((r(\alpha) = \beta) \Rightarrow |\alpha| \le (1 + |\beta|)/c)$

also ex. ein aktiver Ablauf a maximaler Länge mit $r(\alpha) = \beta$.
Dieser Ablauf werde im weiteren betrachtet.

$\Rightarrow (aktiv_Q(\alpha h) \Rightarrow r(h) \ne \lambda)$ (2)

Annahme: $lf_Q(\alpha) \cap Q_i = \emptyset$

behinderungsfrei: $\Rightarrow lf_P(\beta) \cap r(Q_i) = \emptyset$

Wegen (1) u. Vor. $g_i \in r(Q_i) \wedge g_i \in lf(\beta)$ $\Rightarrow lf_P(\beta) \cap r(Q_i) = g_i$

Das ist ein Widerspruch, so daß die Annahme falsch sein muß.

Sei h_i die Aktion mit $h_i \in lf_Q(\alpha) \cap Q_i$

Wegen (2): $\Rightarrow r(h_i) \ne \lambda$

sicher: $r(\{h_1, \ldots, h_m\}) \subseteq \{g_1, \ldots, g_m\}$

schwach prozeßtreu: $\Rightarrow (i \ne j \Rightarrow \neg proc_Q(h_i, h_j))$

also ist $r(\{h_1, \ldots, h_m\}) = \{g_1, \ldots, g_m\}$

- 2. Teilaussage: $\{h_1, h_2, ..., h_m\} = \mathrm{lf}_Q(\alpha)$

Annahme: $h \in \mathrm{lf}(\alpha) \wedge h \notin \{h_1, \dots, h_m\}$

sicher und (2): $\Rightarrow$ es ex. g_i mit $r(h) = g_i$

nach Konstruktion $r(h_i) = g_i$

schwach prozeßtreu: $\Rightarrow \mathrm{proc}(h, h_i)$

$\Rightarrow h = h_i$ im Widerspruch zur Annahme,

also ist die 2. Teilaussage richtig.

S1.6 Invarianztheorem von Lipton

Es seien P und $\overline{P}$ Koordinierungssysteme. Wenn P durch $\overline{P}$ bezüglich r vollständig, sicher, schwach prozeßtreu, prompt und behinderungsfrei implementiert wird und den Σ-Schnitt Π implizit definiert, so definiert auch $\overline{P}$ den Schnitt Π implizit.

- Beweis des Invarianztheorems

$\overline{P}$ sei bzgl. r Implementation von P.

P def. implizit Π es ex. α und $A_0 \subseteq A$, so daß $P_0 = (A_0, D, bz, adr, val(\alpha))$ Π def.

$d: A_0 \rightarrow \Sigma$ sei die zugehörige bijektive Abbildung

$g \in A_0 \quad \Rightarrow d(g) \in \Pi$

$\Rightarrow \mathrm{aktiv}_{P_0}(g)$

$\Rightarrow g \in \mathrm{lf}_P(\alpha)$

Fundamentaltheorem:

Es ex. β, B mit $\mathrm{aktiv}_{\overline{P}}(\beta) \wedge B_0 \subseteq \mathrm{lf}_{\overline{P}}(\beta) \wedge (r(\beta) = \alpha) \wedge r: B_0 \rightarrow A_0$ bijektiv

Beh.: $\overline{P}_0 = (B_0, \overline{D}, \overline{bz}, \overline{adr}, val_{\overline{P}}(\beta))$ definiert Schnitt Π mittels $d \cdot r: B_0 \rightarrow \Sigma$

Nachweis in zwei Schritten: (1) $\mathrm{aktiv}_{\overline{P}_0}(\delta) \Rightarrow d(r(\delta)) \in \Pi$

(2) $d(r(\delta)) \in \Pi \Rightarrow \mathrm{aktiv}_{\overline{P}_0}(\delta)$

(1) $\mathrm{aktiv}_{\overline{P}_0}(\delta) \quad \Rightarrow \mathrm{aktiv}_{\overline{P}}(\beta\delta)$

$\Rightarrow \mathrm{aktiv}_P(r(\beta\delta))$

$\Rightarrow \mathrm{aktiv}_P(\alpha r(\delta))$

$\Rightarrow \mathrm{aktiv}_{P_0}(r(\delta))$

$d(r(\delta)) \in \Pi$

(2) $d(r(\delta)) \in \Pi \quad \Rightarrow \mathrm{aktiv}_{P_0}(r(\delta))$

$\Rightarrow \mathrm{aktiv}_P(\alpha r(\delta))$

a) $i \neq j \Rightarrow \neg\mathrm{proc}_{\overline{P}}(\delta_i, \delta_j)$ da $\delta_i, \delta_j \in \mathrm{lf}_{\overline{P}}(\beta)$

b) $\mathrm{aktiv}_{\overline{P}}(\beta\delta)$, wie folgende Überlegung zeigt:

Es sei $\delta = \eta f \mu$, $\mathrm{aktiv}_{\overline{P}}(\beta\eta)$ und $\neg\mathrm{aktiv}_{\overline{P}}(\beta\eta f)$. Sei $f \in \overline{P}_i$.

Annahme: $\mathrm{lf}_{\overline{P}}(\beta\eta) \cap \overline{P}_i = \emptyset$

behinderungsfrei: $\Rightarrow \mathrm{lf}_P(r(\beta\eta)) \cap r(\overline{P}_i) = \emptyset$

$\mathrm{aktiv}_P(r(\beta\eta f))$ und f wegen Fundamentaltheorem beobachtbar

$\Rightarrow r(f) \in \mathrm{lf}_P(r(\beta\eta))$

Widerspruch

$\Rightarrow \mathrm{lf}_{\overline{P}}(\beta\eta) \cap \overline{P}_i \neq \emptyset$

es ex. $h \in \mathrm{lf}_{\overline{P}}(\beta\eta) \cap \overline{P}_i$

$f \in B_0$ $\quad f \in \mathrm{bef}_{\bar{P}}(\beta)$

$\mathrm{proc}_{\bar{P}}(f, h)$ $\quad \Rightarrow f = h$

$f \in \mathrm{lf}_{\bar{P}}(\beta\eta)$ Widerspruch!

$\Rightarrow \mathrm{aktiv}_{\bar{P}_0}(\delta)$

Π sei Permutationsschnitt.

$W(a_1 \bullet \ldots \bullet a_k) := \{a_1, \ldots, a_k\}$; $M := \{A \mid (A = W(\alpha)) \wedge \alpha \in \Pi\}$; $m := |\wp(\Sigma)|$;

(1) $B \in M \Rightarrow b_1 \ldots b_{|B|} \in \Pi$

(2) $B \in M \wedge A \subseteq B \Rightarrow A \in M$

(3) $k_B := \begin{cases} |B| & \text{falls } B \in M \\ |B| - 1 & \phantom{\text{falls }} B \notin M \end{cases}$

(4) $A \in M \Leftrightarrow \forall B(B \subseteq \Sigma \Rightarrow |A \cap B| \le k_B)$, denn $B \notin M \Rightarrow |A \cap B| < |B|$ und
$A \notin M \Rightarrow (k_A = |A| - 1) \Rightarrow |A \cap A| > k_A$.

Semaphore: $S_1, \ldots, S_m$; anfänglich $S_i = k_{B_i}$

Aktionen: $a_{i,1}$: $P(\{S_k | a_i \in B_k\})$

(5) $\mathrm{aktiv}(\alpha) \Rightarrow \left(S_j[\mathrm{val}(\alpha_1 \ldots \alpha_k)] = k_{B_j} - \sum_{\nu=1}^{k} |\{\alpha_\nu\} \cap B_j|\right)$

(6) $S_j[\mathrm{val}(\alpha_1 \ldots \alpha_k)] = k_{B_j} - |\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \cap B_j|$

3

S1.7 **Invarianztheorem von Lipton**

Es seien P und Q Koordinierungssysteme. Wenn P durch Q bezüglich r vollständig, sicher, schwach prozeßtreu, prompt und behinderungsfrei implementiert wird und den Σ-Schnitt Π implizit definiert, so definiert auch Q den Schnitt Π implizit

Lokaler Vergleich von Koordinierungsmechanismen

Γ, Γ_1 und Γ_2 seien Koordinierungssysteme

Definition 17.1 Π ist Γ-definierbar

Der Σ-Schnitt Π ist Γ-definierbar genau dann, wenn es ein Γ-System P gibt, das Π definiert.

Definition 17.2 $\Gamma_1 \to \Gamma_2$

Seien Γ_1 und Γ_2 zwei Typen von Koordinierungssystemen. Dann gilt $\Gamma_1 \to \Gamma_2$ genau dann, wenn es ein Γ_1-System P gibt, das durch kein Γ_2-System Q implementiert werden kann.

Definition 17.3 Γ ist abgeschlossen

Eine Klasse C von Prozeßsysteme ist abgeschlossen genau dann, wenn gilt: Ist P ein System der Klasse C, $A' \subseteq A$ und α aktiver Ablauf in P, dann ist auch $P' = (A', D, bz|A', adr|A', val(\alpha))$ ein System der Klasse C.

Satz 7.1

Jedes der betrachteten Koordinierungssysteme ist abgeschlossen.

Satz 7.2

Es seien Γ_1 und Γ_2 zwei Typen von Koordinierungssystemen. Γ_2 sei abgeschlossen.
Ist Π ein Γ_1-definierbarer, aber nicht Γ_2-definierbarer Schnitt, so gilt $\Gamma_1 \to \Gamma_2$.

Satz 7.3

Alle Ausschlußschnitte sind PN-definierbar (und damit auch VRS-definierbar).

Beweis:

Sei $R \subseteq \Sigma \times \Sigma$ eine reflexive Relation, die einen Ausschlußschnitt definiert, und $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

P wird in folgender Weise definiert:

1. Der Datenbereich besteht aus den Semaphoren $S_1, S_2, ..., S_n$
2. Im Anfangszustand ist $S_1 = S_2 = \ldots = S_n = 1$.
3. A besteht aus den Aktionen
   $a_{i,1}$: WHEN $('L_i = 1) \wedge \forall j(a_j R a_i \Rightarrow 'S_j > 0)$ DO $(L_i = 'L_i + 1) \wedge S_i = 'S_i - 1$
   mit $1 \le i \le n$.

Definition 17.4 Symmetrische Ausschlußschnitte

Ein Ausschlußschnitt Π über Σ ist symmetrisch genau dann, wenn gilt:
$\forall a, b(a, b \in \Sigma \Rightarrow (ab \in \Pi \Leftrightarrow ba \in \Pi))$, d. h. die Relation R ist reflexiv und symmetrisch.

Satz 7.4

VAS-definierbare Ausschlußschnitte sind symmetrisch.

Beweis
Angenommen $a_i R a_j \wedge \neg(a_j R a_i)$.
$a_i R a_j \Rightarrow a_i a_j \notin \Pi \Rightarrow \neg \text{aktiv}(a_i a_j)$
Sei $a_i = \langle e^i \rangle$ und $a_j = \langle e^j \rangle$. Da $\neg\text{aktiv}(a_i a_j)$ muß gelten: $\exists k((S_k + e^i_k) + e^j_k < 0)$.
Da andererseits $\text{aktiv}(a_j a_i)$ ist, muß gelten: $(S + e^j) + e^i \ge 0$, woraus ein Widerspruch resultiert.

Definition 17.5 Permutationsschnitt

Ein Schnitt Π über Σ ist Permutationsschnitt genau dann, wenn gilt:
$\forall \alpha \forall \beta((\beta = \text{permutation}(\alpha)) \wedge \alpha \in \Pi \Rightarrow \beta \in \Pi)$.

Satz 7.5

Ein Ausschlußschnitt Π ist genau dann symmetrisch, wenn er ein Permutationsschnitt ist.

Beweis

symmetrisch $\Leftrightarrow \forall a, b(\neg(aRb) \Leftrightarrow \neg(bRa)) \Leftrightarrow$ Permutationsschnitt

.

Satz 7.6

Jeder Permutationsschnitt ist PV_m-definierbar.

Definition 17.6

Ein Ausschlußschnitt Π über Σ heißt Äquivalenzschnitt genau dann, wenn gilt: Π = exclusion(R) und die Relation R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv (also eine Äquivalenzrelation).

Satz 7.7

Jeder PV-definierbare Ausschlußschnitt ist ein Äquivalenzschnitt.

Satz 7.8

Jeder PV_k-definierbare Ausschlußschnitt ist ein Äquivalenzschnitt.

Satz 7.9

Jeder Äquivalenzschnitt ist PV-definierbar und PV_k-definierbar.

Universelle Schnitte

Definition 17.7 Kommutativer Schnitt

Ein Schnitt Π heißt kommutativ genau dann, wenn gilt:

$\forall a, \alpha, \beta(a \in \Sigma \wedge \alpha \in \Pi \wedge \alpha a \notin \Pi \wedge (\beta = \text{permutation}(\alpha)) \Rightarrow \beta a \notin \Pi)$

.

Obige Definition ist gleichwertig mit

$\forall a, \alpha, \beta(a \in \Sigma \wedge \alpha \in \Pi \wedge \beta a \in \Pi \wedge (\beta = \text{permutation}(\alpha)) \Rightarrow \alpha a \in \Pi)$

.

Satz 7.10 Jeder kommutative Schnitt ist KPN-definierbar und umgekehrt.

Anderes Vergleichskonzept

Literatur: Bathelt, P.: Vergleich von Synchronisationsmechanismen. Arbeitsberichte des Instituts für Mathematische Maschinen und Datenverarbeitung, Universität Erlangen-Nürnberg, Band 15, Nr. 3, 1982.

Erstes Leser-/Schreiber-Problem

Es sei eine unbekannte, aber endliche Anzahl von Leseprozessen gegeben, die Daten aus einer Datei lesen.

Es sei eine unbekannte, aber endliche Anzahl von Schreibprozessen gegeben, die Daten in der Datei modifizieren.

Ist es möglich, eine Prozeß-Klasse Leser, eine Prozeß-Klasse Schreiber und eine feste Menge globaler Semaphore zu definieren, so daß bei Instantiierung beliebiger Mengen von Lesern und Schreibern die gewünschte Koordinierung eingehalten wird?

Eine Lösung mit KPN-Systemen kann in folgender Weise beschrieben werden:

Leser:

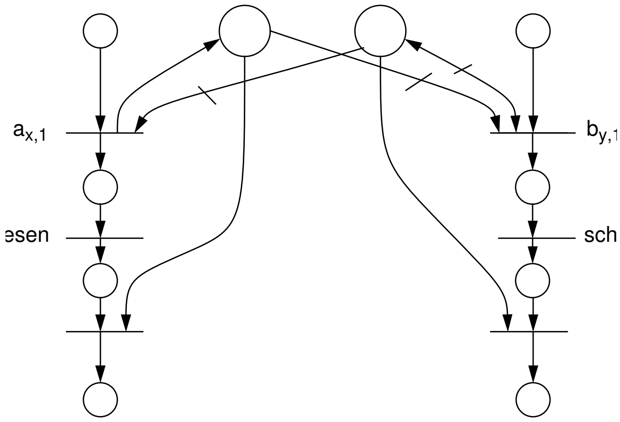
$a_{x,1}$: WHEN $('L_x = 1) \wedge ('S_s = 0)$ DO
$(L_x = 2) \wedge (S_l = 'S_l + 1)$
$a_{x,2}$: WHEN $'L_x = 2$ DO
$(L_x = 3) \wedge$ lesen
$a_{x,3}$: WHEN $'L_x = 3$ DO
$(L_x = 1) \wedge (S_l = 'S_l - 1)$

Schreiber:

$b_{y,1}$: WHEN $('L_y = 1) \wedge ('S_s = 0) \wedge ('S_l = 0)$ DO
$(L_y = 2) \wedge (S_s = 'S_s + 1)$
$b_{y,2}$: WHEN $'L_y = 2$ DO
$(L_y = 3) \wedge$ schreiben
$b_{y,3}$: WHEN $'L_y = 3$ DO
$(L_y = 1) \wedge (S_s = 'S_s - 1)$

Dieses System definiert bei Befehlszählerständen 1 implizit einen Ausschlußschnitt mit:

$$\forall i, j (i, j \in \{1, 2, \ldots\} \Rightarrow a_{i,1} R a_{i,1} \wedge b_{i,1} R b_{j,1} \wedge a_{i,1} R b_{j,1} \wedge b_{j,1} R a_{i,1})$$
.



Satz 7.11

Es existieren keine Beschreibungen der Lese- und Schreibprozesse derart, daß
alle Prozesse Instantiierungen dieser Beschreibungen sind,
die Anzahl der Instanzen beliebig (aber endlich) gewählt werden kann,
die Zahl der Semaphore konstant ist,
die dabei entstehenden Prozeßsysteme PN-Systeme sind und
obiger Ausschlußschnitt implizit definiert wird.

Beweis:
Wegen $a_{i,1} R b_{j,1}$ müssen $a_{i,1}$ und $b_{j,1}$ über eine gemeinsame Eingangsstelle $S_{i,j}$ verfügen, die mit einer Marke versehen ist.

Annahme: $i_1 \neq i_2 \wedge S_{i_1,j} \equiv S_{i_2,j}$

Dann ist $a_{i_1,1} R a_{i_2,1}$, im Widerspruch zur Aufgabenstellung.
Also müssen die Schreiber mindestens so viele Eingangsstellen besitzen, wie Leseprozesse im System existieren. Somit können die Forderungen des Satzes nicht erfüllt werden.