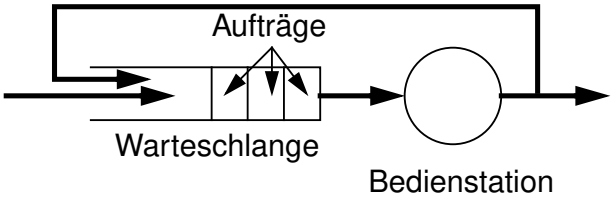
3 Untersuchung und Vergleich von Prozessorvergabestrategien

3.1 Die operationelle Methode

Mehrere Aufträge (Prozesse) werden im Zeitmultiplex von einem Prozessor bearbeitet:



- Frage: Welchen Einfluß übt die Auswahl-(Zuordnungs-)Strategie auf Verweilzeiten und Durchsatz aus?

- Systembeschreibung bei operationeller Betrachtung:
  Abarbeitung der Aufträge wird durch Warte- und Bedienfunktionen beschrieben.

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

- Wartefunktion:

$$W_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls der Auftrag } P_i \text{ während des Intervalls} \\ & [t\Delta t, (t+1)\Delta t) \text{ auf Bedienung wartet,} \\ & \text{aber nicht bearbeitet wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Bedienfunktion:

$$R_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls der Auftrag } P_i \text{ während des Intervalls} \\ & [t\Delta t, (t+1)\Delta t) \text{ bedient wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nebenbedingung 1

$$\forall i(1 \le i \le n \Rightarrow \exists t((0 \le t < T \wedge (R_i(t) = 1)) \wedge \forall t(0 \le t < T \Rightarrow (W_i(t) R_i(t) = 0))))$$

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

- Abgeleitete Begriffe
  - Gesamtwartezeit des Auftrags P_i:

$$W_i := \sum_{t' = 0}^{T-1} W_i(t')\Delta t$$

  - Gesamtbedienzeit des Auftrags P_i:

$$R_i := \sum_{t' = 0}^{T-1} R_i(t')\Delta t$$

  - Restbedienzeit von P_i zum Zeitpunkt t:

$$\vec{R}_i(t) := \sum_{t' = t}^{T-1} R_i(t')\Delta t$$

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

  - Von P_i zum Zeitpunkt t verbrachte Wartezeit:

$$\overleftarrow{W}_i(t) := \sum_{t' = 0}^{t-1} W_i(t')\Delta t$$

  - Restbedienzeit der zum Zeitpunkt t wartenden Aufträge:

$$W\vec{R}(t) := \sum_{i = 1}^{n} W_i(t)\vec{R}_i(t)$$

  - Bisherige Wartezeit der zum Zeitpunkt t bedienten Aufträge:

$$R\overleftarrow{W}(t) := \sum_{i = 1}^{n} R_i(t)\overleftarrow{W}_i(t)$$

  - Mittlere Restbedienzeit für die wartenden Aufträge:

$$\vec{WR} := \frac{1}{T}\sum_{t' = 0}^{T-1} W\vec{R}(t')$$

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

- Mittlere bisherige Wartezeit der in Bedienung befindlichen Aufträge:

$$R\overleftarrow{W} := \frac{1}{T}\sum_{t'=0}^{T-1} R\overleftarrow{W}(t')$$

- Analog werden $R\overrightarrow{W}$, $W\overleftarrow{R}$ und $R\overrightarrow{R}$ definiert.

- Zahl der zum Zeitpunkt t wartenden Aufträge
(= Warteschlangenlänge):

$$Q(t) := \sum_{i=1}^{n} W_i(t)$$

- Mittlere Warteschlangenlänge:

$$E[Q] := \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} Q(t)$$

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

- Mittlere Wartezeit:

$$E[W] := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i$$

- Mittlere Ankunftsrate:
(= 1/mittleres Ankunftsintervall)

$$\lambda := \frac{n}{T\Delta t}$$

- Zahl der zum Zeitpunkt t im System befindlichen Aufträge:

$$N(t) := \sum_{i=1}^{n} (W_i(t) + R_i(t))$$

- Mittlere Zahl der im System befindlichen Aufträge:

$$E[N] := \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} N(t)$$

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

- Verweilzeit des Auftrags P_i:

$$U_i := \sum_{t=0}^{T-1} (W_i(t) + R_i(t))\Delta t$$

- Mittlere Verweilzeit:

$$E[U] := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U_i$$

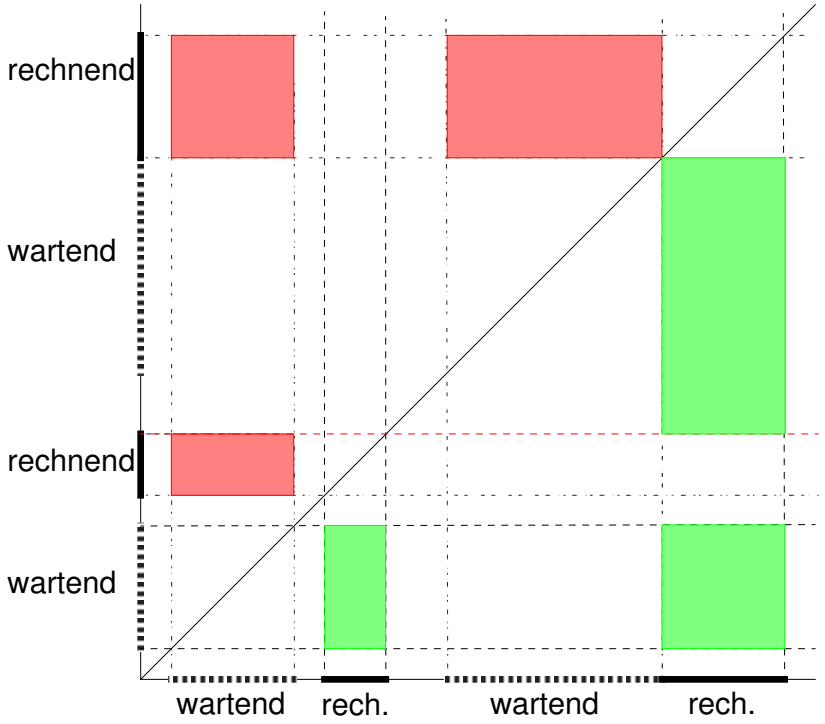
Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

S3.1 **Satz**

1. $W\vec{R} = R\overleftarrow{W}$
2. $R\vec{W} = W\overleftarrow{R}$
3. $R\vec{R} = \frac{1}{2T\Delta t} \sum_{i=1}^{n} R_i(R_i + \Delta t)$
4. $R\overleftarrow{W} + R\vec{W} = \frac{1}{T\Delta t} \sum_{i=1}^{n} W_i R_i$

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

Beweis zu $W\vec{R} = R\overleftarrow{W}$: Betrachtung eines einzelnen Prozesses



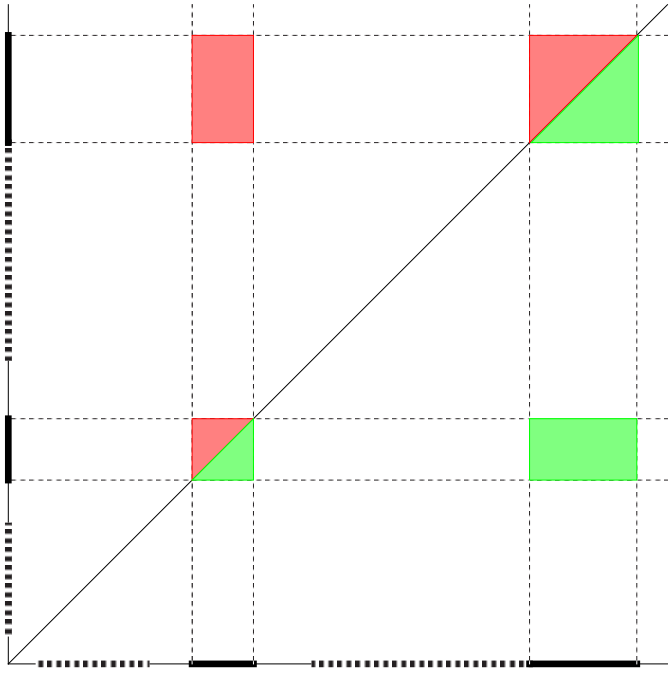
Linke Seite:
Summe der roten Rechtecke

Rechte Seite:
Summe der grünen Rechtecke

Aus Symmetriegründen sind beide gleich

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

Beweis zu $R\vec{R} = \frac{1}{2T\Delta t}\sum_{i=1}^{n} R_i(R_i + \Delta t)$

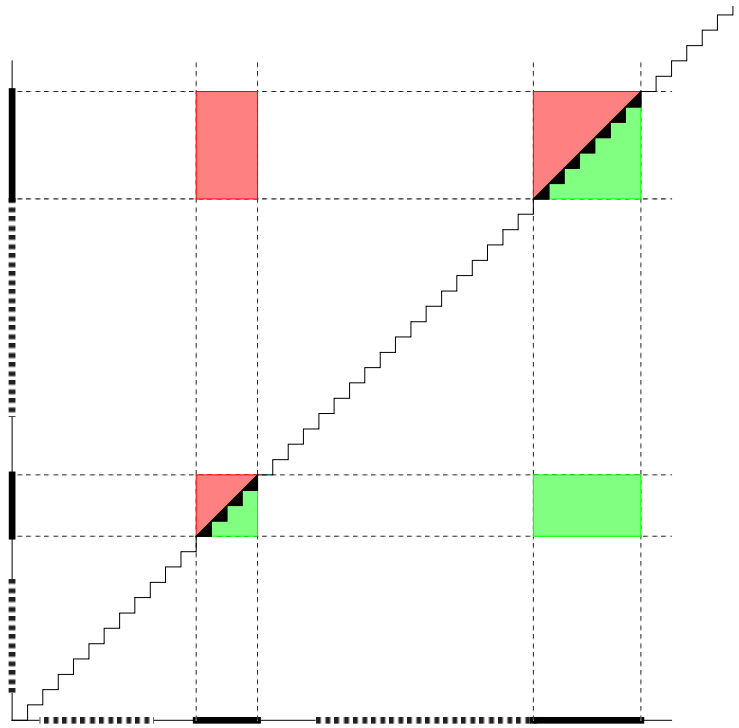


Linke Seite
Summe der roten Flächen

Im Grenzfall $\Delta t \rightarrow 0$
Summe der roten Flächen = Summe der grünen Flächen

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

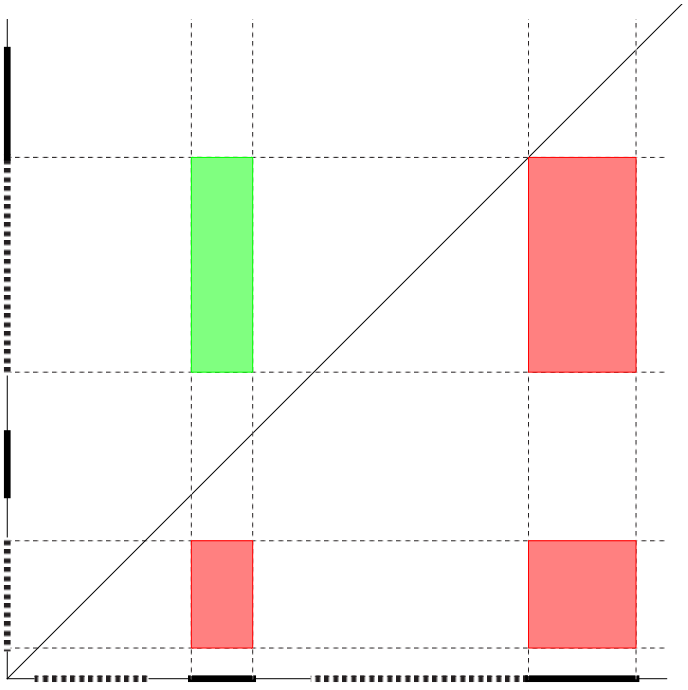
genauer



Stufe = Δt

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

Beweis zu $R\overleftarrow{W} + R\overrightarrow{W} = \frac{1}{T\Delta t}\sum_{i=1}^{n} W_i R_i$



Linke Seite:

1. Summand = Summe der roten Flächen

2. Summand = Summe der grünen Flächen

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

S3.2

Theorem von Little

1. $E[Q] = \lambda E[W]$
2. $E[N] = \lambda E[U]$

Beweis:

Einfache Umformungen der Definitionen

Bezeichnungen

Ankunftszeitpunkt des Auftrags P_i

$$a_i := \min_{0 \le t < T} \{t | W_i(t) + R_i(t) \neq 0\}$$

Fertigstellungszeitpunkt des Auftrags P_i

$$e_i := \max_{0 \le t < T} \{t | R_i(t-1) = 1\}$$

Nebenbedingung 2

$$\forall i \forall t (0 \le t < T \Rightarrow (a_i \le t < e_i \Leftrightarrow (W_i(t) + R_i(t) = 1)))$$

S3.3

Kleinrock

Das System verfüge über eine einzige Bedienstation. Dann hat für alle Strategien, die

1. nicht verdrängend sind (d. h. $R\vec{W} = 0$),
2. die Bedienstation nur unbenutzt lassen, wenn keine Aufträge im System sind und
3. Ankunfts- und Bedienzeiten nicht beeinflussen,

die Größe $\sum_{i=1}^{n} R_i W_i$ den gleichen Wert.

Beweis:

1. $\vec{R}(t) := W\vec{R}(t) + R\vec{R}(t)$ ist unter den gemachten Voraussetzungen ein sägezahnähnlicher Treppenzug, dessen Form unabhängig von der Zuordnungsstrategie ist.
2. Da nach Annahme R_i unabhängig von der Strategie ist, gilt dies wegen Satz 3.1 auch für $R\vec{R}$
3. Wegen 1. ist auch der Mittelwert $\vec{R} = W\vec{R} + R\vec{R}$ strategie-unabhängig und damit wegen 2. auch $W\vec{R}$. Aufgrund von Satz 3.1 gilt dies dann auch für $R\overleftarrow{W}$.
4. Nach Voraussetzung ist die Strategie nicht verdrängend, also $R\vec{W} = 0$.
   Mit Satz 3.1 ergibt sich $RW = R\overleftarrow{W} + R\vec{W} = \frac{i}{T\Delta t}\sum_{i=1}^{n} R_i W_i$, woraus wegen 3. die Behauptung folgt.

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

S3.4 **Satz: Minimierung der mittleren Verweilzeit bei nicht verdrängenden Strategien**

In einem System mit einer Bedienstation, das zum Zeitpunkt 0 bereits alle Aufträge enthält (d. h. für alle i ist $R_i(0) + W_i(0) = 1$) und das keine Verdrängung zuläßt, wird die mittlere Verweilzeit minimiert, wenn die Aufträge nach aufsteigenden Bedienzeitanforderungen abgearbeitet werden. Solche Vorgehensweisen werden als *shortest job first (SJF)* bezeichnet.

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

S3.5 **Satz: Minimierung der mittleren Verweilzeit bei verdrängenden Strategien**

In einem System mit einer Bedienstation, das n Aufträge zu bearbeiten hat, minimiert die Strategie *preemptive shortest job first (PSJF)* die mittlere Verweilzeit, falls Verdrängung und Zuordnung von Aufträgen keine Zeit beanspruchen.

L3.5.1 Lemma

Eine Strategie S, die die mittlere Verweilzeit minimiert, erzeugt keine Leerstellen, d. h. in jedem Intervall $[t_1, t_2)$ ist ein Auftrag in Bearbeitung, falls während dieses Intervalls immer Aufträge im System sind.

L3.5.2 Lemma

Eine Strategie S, die U minimiert, erzeugt höchstens zu den Ankunftszeitpunkten a_i Verdrängungen.

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

Bezeichnung

Jedem Auftrag sei ein Zielzeitpunkt z_i zugeordnet, zu dem spätestens seine Fertigstellung erfolgen sollte.

S3.6 **Satz: Minimierung der maximalen Verspätung ohne Verdrängung**

Ein System mit einer Warteschlange und einer Bedienstation, das zum Zeitpunkt 0 bereits alle Aufträge enthält und keine Verdrängung zuläßt, minimiert die maximale Verspätung $\max_i\{L_i | (L_i = e_i - z_i)\}$, wenn die Aufträge nach aufsteigender Zielzeit z_i abgearbeitet werden *(deadline scheduling)*.

S3.7 **Satz: Minimierung der maximalen Verspätung mit Verdrängung**

In einem System mit einer Warteschlange und einer Bedienstation wird $\max_i\{L_i | (L_i = e_i - z_i)\}$ minimiert, wenn zu jedem Zeitpunkt unter den im System vorhandenen Aufträgen einer mit kleinstem Zielzeitpunkt zugeordnet wird *(preemptive deadline scheduling)*.

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

Beweis: S sei ein Ablaufplan gemäß PDS

O. B. d. A. Numerierung so, daß $i < j \Leftrightarrow z_i < z_j \vee (z_i = z_j \wedge e_i < e_j)$

k sei kleinster Index mit L_k maximal

1) Für alle i $L_i \leq L_k \Rightarrow e_i - z_i \leq e_k - z_k \Rightarrow z_k - z_i \leq e_k - e_i$

2) $i < k \Rightarrow z_i \leq z_k \Rightarrow 0 \leq z_k - z_i \leq e_k - e_i \Rightarrow e_i \leq e_k$

   $i \neq k$: $\Rightarrow e_i < e_k$

3) Beh.: Teilsystem $P_1, P_2, ..., P_k$ abgearbeitet wie S ist in diesem Teilsystem ebenfalls eine Abarbeitung nach PDS; es ist lediglich zu zeigen, daß in dem Teisystem keine Lücken entstehen.

   Nach Definition der Indizierung: $k < r \Rightarrow z_k < z_r \vee (z_k = z_r \wedge e_k < e_r)$

   Im ersten Fall wird P_r nur in Intervallen bearbeitet, während derer kein Auftrag des Teilsystems im System ist,

   im zweiten Fall hätte P_r eine größere Verspätung als P_k, so daß er nicht eintreten kann.

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig