Aufgabe 7: Die analytische Methode: Mensawarteschlangen

Das Erlanger Studentenwerk denkt daran, die mittleren Wartezeiten beim Besuch der Süd-Mensa zu verkürzen. Insbesondere für die Linie 1, an der sich immer die längsten Schlangen bilden, liegen drei konkrete Verbesserungsvorschläge vor:

i) Durch organisatorische Maßnahmen soll sichergestellt werden, daß die Abfertigung der Studenten an der Registrierkasse doppelt so schnell erfolgt wie bisher.

ii) Das gesamte Angebot der Linie 1 soll auch auf der Linie 4 zur Verfügung gestellt werden. Man geht davon aus, daß sich die Studenten danach zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf die beiden Linien verteilen.

iii) Die Registrierkassen für die Linie 1 werden verdoppelt. Man geht davon aus, daß der jeweils erste wartende Student die erste freiwerdende Kasse belegt.

a) Entwerfen Sie zu jedem der drei Vorschläge ein Warteschlangenmodell!
Sie können dabei davon ausgehen, daß die Ankunftsintervalle der Studenten (Ankunftsrate λ) sowie die Bearbeitungszeiten beim Erstellen eines Kassenbons (mittlere Bedienzeit $1/\mu$) exponentiell verteilt sind.

b) Im stationären Zustand gilt der Satz von Little:

$$\text{mittlere Verweilzeit} = \frac{\text{mittlere Anzahl unerledigter Aufträge}}{\text{mittlere Anzahl ankommender Aufträge pro Zeiteinheit}}$$

Untersuchen Sie die drei Vorschläge unter den gemachten Voraussetzungen hinsichtlich der Verweilzeiten!

c) Welche Maßnahme würden Sie dem Studentenwerk empfehlen?
Vergleichen Sie die drei Vorschläge in Abhängigkeit von der Auslastung, und versuchen Sie intuitiv die abgeleiteten Zusammenhänge zu motivieren!

Hinweis:

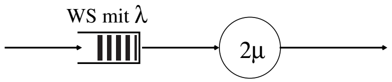
In einem M/M/k-FCFS - Modell gilt:

$$E[N] = k\rho + p_0 \frac{\rho(k\rho)^k}{k!(1-\rho)^2} \qquad \text{mit} \quad p_0 = \frac{1}{\frac{(k\rho)^k}{k!(1-\rho)} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k\rho)^i}{i!}} \qquad \text{und } \rho = \frac{\lambda}{k\mu}$$

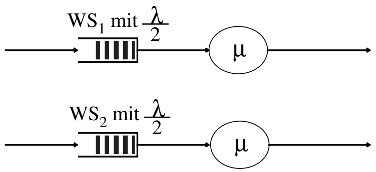
Lösungsvorschlag Aufgabe 7: Die analytische Methode: Mensawarteschlangen

a) Betrachtet man die Registrierkasse als Bedieneinheit, vor der die Studenten an der Essensausgabe eine Warteschlange bilden, so lassen sich die drei Vorschläge folgendermaßen modellieren:

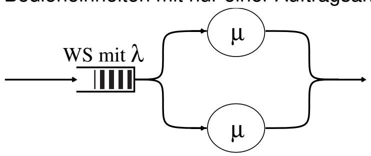
i) Eine doppelt so starke Bedieneinheit:



ii) Zwei gleiche Wartesysteme mit getrennter Aufnahme, wobei ein Auftrag von jedem der beiden Systeme mit gleicher Wahrscheinlichkeit angenommen wird.



iii) Zwei gleiche Bedieneinheiten mit nur einer Auftragsannahme.



b) Berechnung der Verweilzeiten

i) Hier liegt ein M/M/1 - FCFS System vor, bei dem sich die mittlere Anzahl der Aufträge im System allgemein berechnen läßt als

$$E[N] = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

Mit Hilfe des Satzes von Little erhält man daraus die gewünschte mittlere Verweilzeit eines Auftrags im System

$$E[U] = \frac{E[N]}{\lambda} \quad .$$

Da nun speziell im Fall i) die Bedienrate verdoppelt ist, erhält man

$$\rho_i = \frac{\lambda}{2\mu} \qquad \text{und} \qquad E[U_i] = \left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{\frac{\lambda}{2\mu}}{1 - \frac{\lambda}{2\mu}} = \frac{1}{2\mu - \lambda}$$

ii) Hier liegen zwei vollkommen identische Wartesysteme vor. Aus Symmetriegründen können wir daher annehmen, daß die mittlere Verweilzeit in beiden Systemen gleich ist. Wir brauchen also nur eines der beiden M/M/1 - FCFS Systeme zu analysieren und erhalten, wenn wir die Ankunftsrate halbieren:

$$\rho_{ii} = \frac{\lambda/2}{\mu} \quad \text{und } E[U_{ii}] = \frac{1}{\lambda/2}\frac{\frac{\lambda/2}{\mu}}{1 - \frac{\lambda/2}{\mu}} = 2\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{\frac{\lambda}{2\mu}}{1 - \frac{\lambda}{2\mu}} = 2 \times E[U_i]$$

iii) Hier liegt ein M/M/2 - FCFS System vor. Setzt man in die Formel für die mittlere Anzahl von Aufträgen in M/M/k-FCFS-Systemen speziell k = 2 ein und vereinfacht dann diesen Ausdruck, so erhält man:

$$E[N_{iii}] = \frac{2\rho_{iii}}{1 - \rho_{iii}^2} \qquad \text{mit} \qquad \rho_{iii} = \frac{\lambda}{2\mu}$$

Daraus folgt mit dem Satz von Little:

$$E[U_{iii}] = 2\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{\frac{\lambda}{2\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^2} = 2\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{\frac{\lambda}{2\mu}}{\left(1 - \frac{\lambda}{2\mu}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right)}$$

c) Vergleich der mittleren Verweilzeiten:

$$\boxed{E[U_{ii}] = 2E[U_i]} \text{ und } \boxed{E[U_{ii}] = \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right)E[U_{iii}]} \text{ und } \boxed{E[U_{iii}] = \frac{2}{1 + \frac{\lambda}{2\mu}}E[U_i]}$$

Folgerung für den Verlgeich der drei Systeme:

Für $0 \le \frac{\lambda}{2\mu} < 1$ ist der Verbesserungsvorschlag i) der beste, iii) ist der zweitbeste und ii) ist der schlechteste. Vor allem für geringe Auslastungen ist der Vorschlag i) der beste. Bei realistischen Werten von $0 \le \frac{\lambda}{2\mu} < 0.7$ ist immer zum Vorschlag i) zu raten.

Um das Studentenwerk zu entlasten, sind noch zwei kritische Anmerkungen zu unseren Modellierungsschritten angebracht:

- Die Annahme ii), daß sich die Studenten zufällig auf die beiden Linien verteilen, stimmt wohl mit der Realität nicht überein. Man darf vielmehr erwarten, daß sich die Studenten nach einer gewissen Eingewöhnungszeit immer an der kürzesten Schlange anstellen, um dadurch die persönliche Verweilzeit zu optimieren.
- Bei i) und iii) ist zu beachten, daß bei schnellerer Erstellung des Kassenbons ein neuer Engpaß bei der Essensausgabe entstehen könnte. Um diese Situation zu modellieren, müßte man zwei Wartesysteme hintereinanderschalten, jeweils eines für die Essensausgabe und eines für die Registrierkasse.