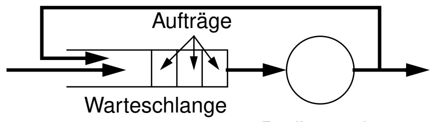
2 Untersuchung und Vergleich von Prozessorvergabestrategien

2.1 Die operationelle Methode

Mehrere Aufträge (Prozesse) werden im Zeitmultiplex von einem Prozessor bearbeitet:



Frage: Welchen Einfluß übt die Auswahl-(Zuordnungs-)Strategie auf Verweilzeiten und Durchsatz aus?

Systembeschreibung bei operationeller Betrachtung: Abarbeitung der Aufträge wird durch Warte- und Bedienfunktionen beschrieben.

Wartefunktion:

$$W_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls der Auftrag } P_i \text{ während des Intervalls } [t\Delta t, (t+1)\Delta t) \text{ auf Bedienung wartet, aber nicht bearbeitet wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bedienfunktion:

$$R_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls der Auftrag } P_i \text{ während des Intervalls } [t\Delta t, (t+1)\Delta t) \text{ bedient wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Gesamtwartezeit des Auftrags P_i:

$$W_i := \sum_{t'=0}^{T-1} W_i(t')\Delta t$$

Gesamtbedienzeit des Auftrags P_i:

$$R_i := \sum_{t'=0}^{T-1} R_i(t')\Delta t$$

Restbedienzeit von P_i zum Zeitpunkt t:

$$\vec{R}_i(t) := \sum_{t'=t}^{T-1} R_i(t')\Delta t$$

Von P_i zum Zeitpunkt t verbrachte Wartezeit:

$$\overleftarrow{W}_i(t) := \sum_{t'=0}^{t-1} W_i(t')\Delta t$$

Restbedienzeit der zum Zeitpunkt t wartenden Aufträge:

$$W\vec{R} := \sum_{i=1}^{n} W_i(t)\vec{R}_i(t)$$

Bisherige Wartezeit der zum Zeitpunkt t bedienten Aufträge:

$$R\overleftarrow{W}(t) := \sum_{i=1}^{n} R_i(t)\overleftarrow{W}_i(t)$$

Mittlere Restbedienzeit für die wartenden Aufträge:

$$\overline{W\vec{R}} := \frac{1}{T}\sum_{t'=0}^{T-1} W\vec{R}(t')$$

Mittlere bisherige Wartezeit der in Bedienung befindlichen Aufträge:

$$\overline{R\overleftarrow{W}} := \frac{1}{T}\sum_{t'=0}^{T-1} R\overleftarrow{W}(t')$$

Analog werden $\overline{R\vec{W}}$, $\overline{W\overleftarrow{R}}$ und $\overline{R\vec{R}}$ definiert.

Zahl der zum Zeitpunkt t wartenden Aufträge (= Warteschlangenlänge):

$$Q(t) := \sum_{i=1}^{n} W_i(t)$$

Mittlere Warteschlangenlänge:

$$E[Q] := \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} Q(t)$$

Mittlere Wartezeit:

$$E[W] := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i$$

Mittlere Ankunftsrate:
(= 1/mittleres Ankunftsintervall)

$$\lambda := \frac{n}{T\Delta t}$$

Zahl der zum Zeitpunkt t im System befindlichen Aufträge:

$$N(t) := \sum_{i=1}^{n} (W_i(t) + R_i(t))$$

Mittlere Zahl der im System befindlichen Aufträge:

$$E[N] := \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} N(t)$$

Verweilzeit des Auftrags P_i:

$$U_i := \sum_{t=0}^{T-1} (W_i(t) + R_i(t))\Delta t$$

Mittlere Verweilzeit:

$$E[U] := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i$$

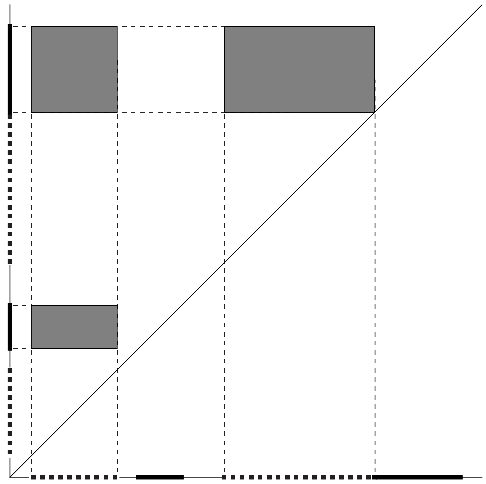
Satz 2.1

1. $W\overrightarrow{R} = R\overleftarrow{W}$
2. $R\overrightarrow{W} = W\overleftarrow{R}$
3. $R\overrightarrow{R} = \frac{1}{2T\Delta t}\sum_{i=1}^{n} R_i(R_i + \Delta t)$
4. $R\overleftarrow{W} + R\overrightarrow{W} = \frac{1}{T\Delta t}\sum_{i=1}^{n} W_i R_i$

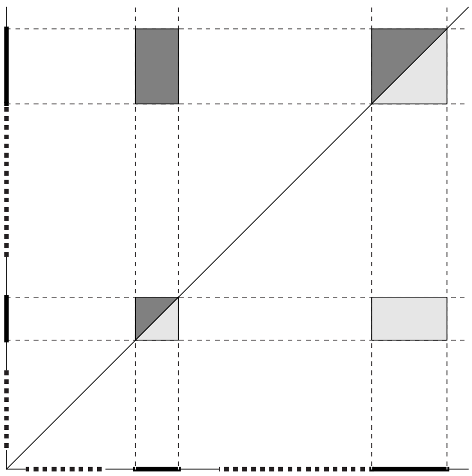
Satz 2.2 Theorem von Little

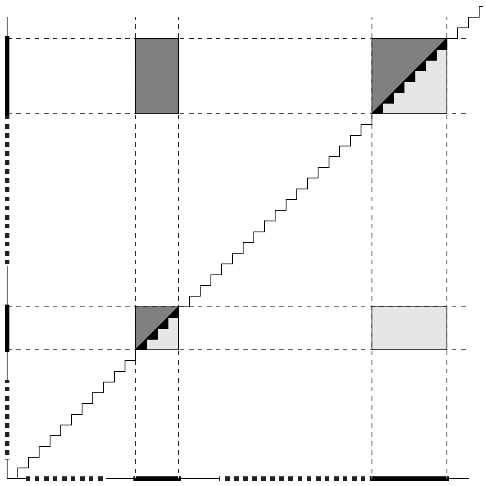
1. $E[Q] = \lambda E[W]$
2. $E[N] = \lambda E[U]$

Beweis zu $W\overrightarrow{R} = R\overleftarrow{W}$

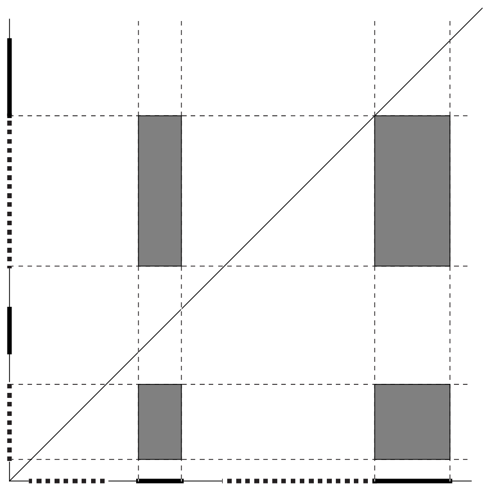


Beweis zu $R\overrightarrow{R} = \frac{1}{2T\Delta t}\sum_{i=1}^{n} R_i(R_i + \Delta t)$





Beweis zu $R\overleftarrow{W} + R\overrightarrow{W} = \frac{1}{T\Delta t}\sum_{i=1}^{n} W_i R_i$



Satz 2.3 Kleinrock

Das System verfüge über eine einzige Bedienstation. Dann hat für alle Strategien, die

1. nicht verdrängend sind (d. h. $R\overrightarrow{W} = 0$),
2. die Bedienstation nur unbenutzt lassen, wenn keine Aufträge im System sind und
3. Ankunfts- und Bedienzeiten nicht beeinflussen,

die Größe $\sum_{i=1}^{n} R_i W_i$ den gleichen Wert.

Beweis:

a) $\vec{R}(t) := W\vec{R}(t) + R\vec{R}(t)$ ist unter den gemachten Voraussetzungen ein sägezahnähnlicher Treppenzug, dessen Form unabhängig von der Zuordnungsstrategie ist.

b) Da nach Annahme R_i unabhängig von der Strategie ist, gilt dies wegen Satz 2.1 auch für $R\vec{R}$

c) Wegen a) ist auch der Mittelwert $\vec{R} = W\vec{R} + R\vec{R}$ strategie-unabhängig und damit wegen b) auch $W\vec{R}$. Aufgrund von Satz 2.1 gilt dies dann auch für $R\overleftarrow{W}$.

d) Nach Voraussetzung ist die Strategie nicht verdrängend, also $R\overrightarrow{W} = 0$.

Mit Satz 2.1 ergibt sich $RW = R\overleftarrow{W} + R\overrightarrow{W} = \frac{i}{T\Delta t}\sum_{i=1}^{n} R_i W_i$, woraus wegen c) die Behauptung folgt.

Satz 2.4

In einem System mit einer Bedienstation, das zum Zeitpunkt 0 bereits alle Aufträge enthält (d. h. für alle i ist $R_i(0) + W_i(0) = 1$) und das keine Verdrängung zuläßt, wird die mittlere Verweilzeit minimiert, wenn die Aufträge nach aufsteigenden Bedienzeitanforderungen abgearbeitet werden. Solche Vorgehensweisen werden als '*shortest job first*' (SJF) bezeichnet.

Satz 2.5

In einem System mit einer Bedienstation, das n Aufträge zu bearbeiten hat, minimiert die Strategie *preemptive shortest job first* (PSJF) die mittlere Verweilzeit, falls Verdrängung und Zuordnung von Aufträgen keine Zeit beanspruchen.

Hilfssatz 2.1

Eine Strategie S, die die mittlere Verweilzeit minimiert, erzeugt keine Leerstellen, d. h. es gibt kein Intervall $[t_1, t_2)$ derart, daß sich in diesem Intervall kein Auftrag in Bearbeitung befindet und gleichzeitig während des Intervalls die Warteschlange nicht leer ist.

Hilfssatz 2.2

Eine Strategie S, die U minimiert, erzeugt höchstens zu den Ankunftszeitpunkten a_i Verdrängungen.

Satz 2.6

Ein System mit einer Warteschlange und einer Bedienstation, das zum Zeitpunkt 0 bereits alle Aufträge enthält und keine Verdrängung zuläßt, minimiert die maximale Verspätung

$\max_i \{L_i | (L_i = e_i - z_i)\}$, wenn die Aufträge nach aufsteigender Zielzeit z_i abgearbeitet werden (*deadline scheduling*).

Satz 2.7

In einem System mit einer Warteschlange und einer Bedienstation wird $\max_i \{L_i | (L_i = e_i - z_i)\}$ minimiert, wenn zu jedem Zeitpunkt unter den im System vorhandenen Aufträgen einer mit kleinstem Zielzeitpunkt zugeordnet wird (*preemptive deadline scheduling*).